МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический

Университет «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина)

Кафедра ФИЗИКИ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3 (№7)

по дисциплине «Физика»

Тема: «Маятник Обербека»

Преподаватель ______________________________ Сизова Е.А.

Студент гр. 1291 ______________________________ Родин В.Д.

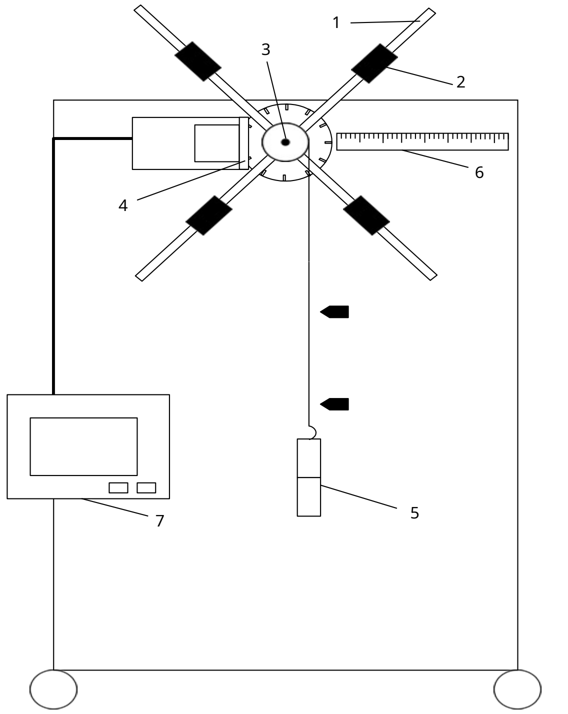
Санкт-Петербург

2021

Цель работы: Экспериментальное исследование законов динамики вращательного движения твердого тела на примере маятника Обербека, определение постоянной части момента инерции маятника Обербека.

Теоретические положения:

Маятник Обербека представляет собой крестовину 1 с грузами 2, на вращающейся оси 3. На шкив на оси намотана нить с грузиком 5, которая, разматываясь, вызывает вращательное движение крестовины. На четырех взаимно перпендикулярных стержнях крестовины располагаются четыре подвижных груза 2 массой m каждый, положение которых относительно оси вращения маятника определяется по измерительной линейке 6. В опыте положения грузов на крестовине меняют с помощью их перемещения по резьбовым спицам крестовины. Фиксация грузов в каждой серии измерений осуществляется путем законтривания двух резьбовых половин каждого груза в выбранном положении. На оси крестовины располагается датчик 4 угловой скорости вращения маятника, подключенный через концентратор к измерительному блоку 7.



Основные формулы:

Уравнение движения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$M = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, где $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$,где ε -угловое ускорение тела, I-момент инерции маятника, M- момент сил, действующих на маятник. $M = TR - M_{тр}$, где T- сила натяжения нити шкива, R- радиус шкива, $M_{тр}$- момент силы трения нити в оси маятника.

Момент инерции стержня является мерой его инертности при вращательном движении и зависит от расположения массы относительно его оси вращения. Определяется равенством:

$I = \int_V \rho r^2 dV$, где ρ- плотоность тела [кг/м^3], расстояние элементарного объема dV от выбраной оси, dV-объем тела.

На маятник действуют две внешние силы: $F_{тр.}$-сила трения, и F_{mg}-сила тяжести грузика, массой m. Их моменты, соответственно $M_{тр.}$ и M_{mg}, а уравнение движения имеет вид $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = I\varepsilon = M_{тр} + M_{mg}$. Также отметим, что непосредственно к точке крепления вращающейся оси приложена сила реакции опоры N. Её момент- M_N.

Запишем основные уравнения динамики для поступательного и вращательного движения маятника Обербека:

$\sum \overrightarrow{F_M} = \vec{0}$; $\sum \overrightarrow{M_M} = I\vec{\varepsilon}$; $M_M = TR - M_{тр.}$.

для груза:

$\sum \overrightarrow{F_г} = m_0\vec{a}$; $\sum \overrightarrow{M_г} = \vec{0}$.

Движение груза описывается: $F_г = m_0 a = m_0 g - T\,; T = m_0(g-a) \Rightarrow M = m_0(g-a)R - M_{тр.} \Rightarrow I\varepsilon = m_0(g-a)R - M_{тр.}$, $F_г$- сила, действующая на грузик

Угловое ускорение вращения маятника связано с ускорением и массой груза m_0 соотношением $a = \varepsilon R \Rightarrow (I + m_0 R^2)\varepsilon = m_0 gR - M_{тр.}$ т.к. правая часть неизменна, то I и ε связаны

Момент инерции крестовины с 4мя грузами: $I = I_0 + 4(I_m + m r^2) = I_c + 4 m r^2$, где I_0- момент инерции крестовины без груза, $(I_m + m r^2)$- момент инерции одного груза массой m (по формуле Гюйгенса-Штейнера), I_m- собственный момент инерции груза, $I_c = I_0 + 4 I_m$- постоянная часть момента инерции для маятника Обербека

Для r_i и r_j запишем:

$$\begin{cases}(I_c + 4 m r_i^2 + m_0 R^2)\varepsilon_i = m_0 gR - M_{тр.} \\ (I_c + 4 m r_j^2 + m_0 R^2)\varepsilon_i = m_0 gR - M_{тр.}\end{cases} \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow (I_c + 4 m r_i^2 + m_0 R^2) = (I_c + 4 m r_j^2 + m_0 R^2)\varepsilon_i \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow I_c = 4m\frac{r_j^2 \varepsilon_j - r_i^2 \varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} - m_0 R^2\,; i \neq j\,; r_i < r_j\,; \varepsilon_i > \varepsilon_j.$$

При этом $b_{ij} = \frac{r_j^2 \varepsilon_j - r_i^2 \varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = const$ при различной геометрии постановки эксперимента

Угловое ускорение вращения маятника находится по формуле $\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2h}{Rt^2}\,; \varphi = \frac{h}{R}$ – угол поворота шкива при прохождении грузом на нити расстояния h между 2мя метками за время t.

$I_c(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = 4m(r_j^2 \varepsilon_j - r_i^2 \varepsilon_i) - m_0 R^2(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$-формула для расчета постоянной части момента инерции маятника Обербека

$$dI = r^2 dm\,; dm = \rho dV\,; \rho = \frac{m}{l} \Rightarrow I = \rho \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \frac{\rho r^3}{3} \vee \frac{\frac{l}{2}}{\frac{-l}{2}} = \frac{rl^3}{24} + \frac{rl^3}{24} = \frac{ml^2}{12} \Rightarrow (формула\ Гюйгенса - Штейнера)\, I$$

, где $I_{Конеч.}$-момент инерции стержня относительно его концов при оси, проходящей через его середину,I_c- собственный момент инерции стержня

$\omega = \varepsilon t$-угловая скорость в момент t с учетом того, что движения равноускоренное. Тогда угол поворота $\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow \varphi = \int_0^t \varepsilon t dt = \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Линейная скорость связана соотношением $v = \omega R = \varepsilon t \times R$, нормальное ускорение равно $a_n = \frac{v^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R$.

Число сделанных маятником оборотов можно рассчитать по формуле $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}$

Проскальзывания нити нет (т.е. $a = \varepsilon R$), следовательно расстояние пройденное грузиком h равно: $h = \varphi R = \frac{\varepsilon t^2}{2} R$

График $\omega(t)$ и$\varepsilon(t)$ теоретически имеет приблизительный вид.

Решение:

1.

1.1. Оценим значения $b_{ij}=\dfrac{r_j^2\varepsilon_j-r_i^2\varepsilon_i}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$

$$b_{12}=\frac{r_2^2\varepsilon_2-r_1^2\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}=\frac{(10\text{¿¿}-1)^2\times 3{,}7449-\left(5\times 10^{-2}\right)^2\times 11{,}394}{11{,}394-3{,}7449}=0{,}0011719\approx 0{,}001172\text{¿}.$$

$$b_{23}=\frac{r_3^2\varepsilon_3-r_2^2\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_3}=(15\times 10\text{¿¿}-2)^2\times 1{,}7531-\frac{(10\text{¿¿}-1)^2\times 3{,}7449}{3{,}7449-1{,}7531}=0{,}00100198\approx 0{,}001002\text{¿¿}.$$

$$b_{13}=\frac{r_3^2\varepsilon_3-r_1^2\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=\frac{(15\times 10\text{¿¿}-2)^2\times 1{,}7531-\left(5\times 10^{-2}\right)^2\times 11{,}394}{11{,}394-1{,}7531}=0{,}00113679\approx 0{,}001137\text{¿}.$$

$$\overline{b_{ij}}=\frac{\sum b_{ij}}{N}=\frac{(0{,}001172+0{,}001002+0{,}001137)}{3}=0{,}001104.$$

Учитывая погрешность при проведении эксперимента (в т.ч. то, что электронная установка всегда выдает немного различные значения), можно считать, что значения коэффициентов имеют близкие значения.

1.2. Измерим постоянный момент инерции. Выборочный метод. Значения приведены в единицах системы СИ

$I_c=4m\dfrac{r_j^2\varepsilon_j-r_i^2\varepsilon_i}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}-m_0R^2$-общая формула

$$I_{c1}=4mb_{12}-m_0R^2=4*0.3*0.001172-0.2\text{¿}\left(2.5*10^{-2}\right)^2=0.0011564.$$

$$I_{c2}=4mb_{23}-m_0R^2=4*0.3*0.001002-0.2\text{¿}\left(2.5*10^{-2}\right)^2=0.0009524.$$

$$I_{c3}=4mb_{13}-m_0R^2=4*0.3*0.001137-0.2\text{¿}\left(2.5*10^{-2}\right)^2=0.0011144.$$

1.3. Измерение среднего (выборочный метод)

	1	**2**	**3**
I_c	0,0011564	0,0009524	0,0011144

Составление выборки

	1	**2**	**3**
I_c	0,0009524	0,0011144	0,0011564

Среднее значение

$\bar{x}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$; N=3, по условию

$$\overline{I_c}=\frac{I_{c1}+I_{c2}+I_{c3}}{N}=\frac{0{,}0009524+0{,}0011144+0{,}0011564}{3}=0{,}0010744.$$

Средне-квадратическое отклонение (СКО)

$S_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\text{¿¿¿¿¿}}$; N=3 по условию

$S_{I_c}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} ¿¿¿¿¿}.$

Проверка на промахи

$|x_i-\bar{x}|\geq v_{p.N.}\times S_x$, по условию $v_{p.N.}=1{,}4$

Для 0,0009524: $|0{,}0009524-0{,}0010744|\geq 1{,}4\times 0{,}00001409$- 0,0009524 соответствует промежутку возможных решений.

Для 0,0011564: $|0{,}0011564-0{,}0010744|\geq 1{,}4\times 0{,}00001409$- 0,0011564 соответствует промежутку возможных решений.

Средне-квадратическое отклонение среднего (СКОС)

$S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{N}}$; N=3 (по условию)

$S_{\overline{I_c}}=\frac{S_{I_c}}{\sqrt{N}}=\frac{0{,}00001409}{\sqrt{3}}=0{,}000008135\approx$0,00000814

Случайная погрешность

$\Delta x_{случ}=t_{p.N.}\times S_{\bar{x}};t_{p.N}=4{,}30$(по условию)

$\Delta I_{ccлуч}=t_{p.N.}\times S_{\overline{I_c}}=0{,}000035002\approx$0,000035

Частные производные

$f(m;R;m_0)=4m\frac{r_j^2\varepsilon_j-r_i^2\varepsilon_i}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}-m_0R^2.$

$a_{r_i}=\frac{\delta f}{\delta r_i}=-8m\frac{\varepsilon_i r_i}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=-0{,}1788.$

$a_{r_j}=\frac{\delta f}{\delta r_j}=8m\frac{\varepsilon_j r_j}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=0{,}1175.$

$a_{\varepsilon_i}=\frac{\delta f}{\delta \varepsilon_i}=4m\frac{r_i^2\varepsilon_j-r_j^2\varepsilon_j}{(\varepsilon_i-\varepsilon_j)^2}=-0{,}000576.$

$a_{\varepsilon_j}=\frac{\delta f}{\delta \varepsilon_j}=4m\frac{r_j^2\varepsilon_i-r_i^2\varepsilon_i}{(\varepsilon_i-\varepsilon_j)^2}=0{,}001753.$

Приборная погрешность

$\theta=|a_m|\theta_m+|a_R|\theta_R+|a_{m_0}|\theta_{m_0}=-0{,}1788*0{,}0005+0{,}1175*0{,}0005-0{,}000576*0{,}01+0.01753*0.01=0{,}0003528\approx 0.00$

.

Полная доверительная погрешность

$\Delta x=\sqrt{\Delta x_{случ}{}^2+\theta_\eta^2}.$

$\Delta I_c=\sqrt{\Delta I_{ccлуч}{}^2+\theta_{I_c}^2}=\sqrt{0{,}0001504^2+0.000035^2}=0{,}0001504\approx 0{,}00015.$

Округление

$\overline{I_c}=0{,}0010744\approx 0{,}00107.$

Ответ: $I_C\pm\overline{I_C}=0{,}00107\pm 0{,}00035[кг\times м^2]$, при N=3, P=95%

2.

2.1. Оценим значений $M_{тр.}$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}(I_c+4mr_i^2+m_0R^2)\varepsilon_i=m_0gR-M_{тр.}\\(I_c+4mr_j^2+m_0R^2)\varepsilon_j=m_0gR-M_{тр.}\end{cases}$$

(1)

$(I_c+4mr_i^2+m_0R^2)\varepsilon_i=m_0gR-M_{тр.}\Rightarrow M_{тр.}=-(I_c+4mr_i^2+m_0R^2)\varepsilon_i+m_0gR=-(0{,}00107+4\times 0{,}3\times 0{,}05^2+0{,}2\times$

(2)
$\left(I_c+4mr_j^2+m_0R^2\right)\varepsilon_i=m_0gR-M_{тр.}\Rightarrow M_{тр.}=-\left(I_c+4mr_j^2+m_0R^2\right)\varepsilon_j+m_0gR=-\left(0{,}00107+4\times0{,}3\times0{,}1^2+0{,}2\times\right.$

Можно сделать вывод о соответствии друг другу вычисленных значений моментов силы трения. Соответственно вычисление значения постоянной части момента инерции по формуле, использованной в п.1, возможно, значения сходны.

3.

3.1. Собственный момент инерции

$$I_m=\frac{ml^2}{12}\Rightarrow I_m=0.3\times\frac{0.035^2}{12}=0.000030625\approx0{,}00003.$$

3.2. Момент инерции крестовины маятника

$$I=I_0+4\left(I_m+mr^2\right)=I_c+4mr^2\Rightarrow I_0=I_C-4I_m=0.00107-4\times0.000030625=0.0009475\approx0{,}00095$$

4.

Скорость вращения маятника $\omega=\omega_0+\varepsilon t$; ω=13.501 [рад/с]

Угол поворота маятника $\varphi=\varepsilon t^2/2$; φ=7.9 [рад]

Количество оборотов $N=\varphi/2\pi$; N=1.25 оборотов

Линейная Скорость $V=\omega R$; V=0.68[м/с]

Тангенциальное ускорение $a_\tau=\varepsilon R$; a_τ=0.28[м/с^2]

Нормальное ускорение $a_n=V^2R$; a_n=18,5 [м/с^2]

Полное ускорение $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$; a=18.5 [м/с^2]

Путь пройденный грузиком $h=\varphi R$; h=0.197 [м]

Можно сказать что значение пути пройденного грузиком совпадает с тем что написано в таблице.

Вывод: В ходе работы были исследованы законы вращательно движения твердого тела на примере Маятника Обербека. Измерена постоянная часть момента инерции маятника $I_C\pm\overline{I_C}=0{,}00107\pm0{,}00035[кг\times м^2]$. Оценены значения момента силы трения $M_{тр.}\approx0{,}0022[H\times м]$ по двум формулам. Значения сходны, что говорит о применимости обоих формул. Оценены угол поворота маятника Обербека, скорость вращения, количество оборотов, сделанных маятником: ω=13.501 [рад/с], φ=7.9 [рад], N=1.25 оборотов. Из этих значений были определены значения линейной скорости, путь, пройдённый грузиком, нормального, тангенциального и полного ускорений. Полученные значения: V=0.68[м/с], h=0.197 [м], a_τ=0.28[м/с^2], a_n=18,5 [м/с^2], a=18.5 [м/с^2].